

2. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Серия Математика. 2012. №7. С. 1-13.
3. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // Изв. вузов. Серия Математика. 2012. №8. С. 44-56.
4. Cooke K.L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // Comp. Math. Appl. 1999. V. 38. P. 229-237.
5. Gyori I., Hartung F. Stability in delay perturbed differential and difference equation // Fields Inst. Commun. 2001. V. 29. P. 181-194.
6. Куликов А.Ю., Малыгина В.В. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. вузов. Серия Математика. 2008. №3. С. 18-26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Malygina V.V. THE TEST-EQUATION METHOD IN INVESTIGATION OF STABILITY OF DIFFERENCE EQUATIONS

A method is proposed for investigation of the stability of solutions to linear scalar difference equations. A test equation is put into correspondence to a family of equations of the class are investigated. The study of properties of the test equation makes it possible to obtain an effective description for the region of stability of all equations of the family.

Key words: difference equation; aftereffect; exponential stability; uniform stability.

УДК 517.911, 517.968

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

© Е.В. Малютина

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; запаздывание, зависящее от параметра; многозначные импульсные воздействия.

Исследуются свойства множества решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями и запаздыванием, зависящим от параметров.

Пусть $\mathbf{L}^n[a, b]$ ($\mathbf{L}_\infty^n[a, b]$) — пространство суммируемых по Лебегу (измеримых, ограниченных в существенном) функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a, b]} = \int_a^b |x(t)| ds$ ($\|x\|_{\mathbf{L}_\infty^n[a, b]} = \text{vraisup}\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$); $t_k \in [a, b]$ ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) — конечный набор точек; $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ — множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Пусть K — метрическое пространство.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $\tau : [a, b] \times K \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори [5], обладает свойством $\mathcal{A}$ в точке $\lambda_0 \in K$, если для любого $t \in [a, b]$ и любого $\lambda \in K$ выполняется неравенство $\tau(t, \lambda) \leq t$ и для любой последовательности $\lambda_i \rightarrow \lambda_0$ в пространстве K при $i \rightarrow \infty$ последовательность $\tau(t, \lambda_i) \rightarrow \tau(t, \lambda_0)$ в пространстве $\mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ и справедливо равенство [6]

$$\mu \left(\bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{i=p}^{\infty} \{t \in [a, b] : \tau(t, \lambda_i) = a\} \right) = 0. \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывная функция $\varphi: (-\infty, a) \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает свойством $\mathcal{B}$, если для любого компактного множества $W \subset K$ отображение $\varphi(\cdot, \cdot)$ ограничено на $(-\infty, a) \times W$.

Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{conv}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующими свойствами:

1) для каждой $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\lambda \in K$ существует измеримая функция $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $\omega(t) \in F(t, x, y, \lambda)$;

2) для каждого ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и каждого компактного множества $U \subset K$ существует суммируемая функция $q_M: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\sup\{|u| : u \in F(t, (x, y), \lambda), (x, y) \in M, \lambda \in U\} \leq q_M(t); \quad (2)$$

3) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ замкнуто.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями и запаздыванием, зависящим от параметра $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in F(t, x(t), x[\tau(t, \lambda)], \lambda), \text{ если } t \in [a, b] \\ x(t) &= \varphi(t, \lambda), \text{ если } t \notin [a, b], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k), \lambda), \quad (5)$$

$$x(a) = x_0, \quad (6)$$

где отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{conv}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, функции $\tau: [a, b] \times K \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: (-\infty, a) \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладают свойствами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, отображения $I_k: \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{conv}[\mathbb{R}^n]$ непрерывны по Хаусдорфу, $k = 1, 2, \dots, m$.

О п р е д е л е н и е 3. Решением задачи (4)–(6) на $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$) называется такая кусочно-непрерывная функция [7] $x: [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой существует такое $q \in \mathbf{L}^n[a, b]$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $q(t) \in F(t, x(t), x[\tau(t, \lambda)], \lambda)$ и при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s) ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \chi_{(t_k, \tau]}(t) \Delta(x(t_k)),$$

где отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \text{conv}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3, $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяют равенствам (5).

Определим оператор $P: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times K \rightarrow \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$ равенствами

$$P(x, \lambda)(t) = \begin{cases} x[\tau(t, \lambda)], & \text{если } \tau(t, \lambda) \in [a, b], \\ \varphi(\tau(t, \lambda), \lambda), & \text{если } \tau(t, \lambda) < a. \end{cases}$$

Запишем задачу (4)–(6) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in N(x, P(x, \lambda), \lambda), \\ \Delta(x(t_k)) &\in I_k(x(t_k), \lambda), \\ x(a) &= x_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\dot{x} = q \in \mathbf{L}^n[a, b]$, оператор Немыцкого $N: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \mathbf{L}_\infty^n[a, b] \times K \rightarrow \Omega(\mathbf{L}^n[a, b])$ определен равенством

$$N(x, y, \lambda) = \{z \in \mathbf{L}^n[a, b] : z(t) \in F(t, x(t), y(t), \lambda)\}, \quad (8)$$

где $x \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и $y \in \mathbf{L}_\infty^n[a, b]$.

Т е о р е м а 1. *Найдется такое $\tau \in (a, b]$, что решение задачи (7) существует на отрезке $[a, \tau]$.*

О п р е д е л е н и е 4. Решение $x: [a, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи (7) называется *непродолжаемым*, если не найдется такого решения $y: [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\tau \in [c, b]$), что для любого $t \in [a, c)$ выполняется $x(t) = y(t)$.

Решение $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ считается *непродолжаемым*.

Т е о р е м а 2. *Решение $x: [a, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($c \in (a, b)$) задачи (7) непродолжаемо в том и только в том случае, когда $\lim_{t \rightarrow c-0} |x(t)| = \infty$.*

Т е о р е м а 3. *Любое решение задачи (7) на отрезке $[a, \tau]$ можно продолжить до непродолжаемого.*

Пусть $H(x_0, \tau, \lambda)$ – множество всех решений задачи (7) на отрезке $[a, \tau]$.

О п р е д е л е н и е 5. Задача (7) *априорно ограничена в точке $\lambda \in K$* , если существует такое число $m > 0$, что для любого $t \in [a, b]$ не существует $y \in H(x_0, \tau, \lambda)$, удовлетворяющего неравенству

$$\|y\|_{\tilde{C}[a, \tau]} > m. \quad (9)$$

Если неравенство (9) выполняется для любого $\lambda \in U \subset K$, то будем говорить, что задача (7) *априорно ограничена в совокупности на множестве $U \subset K$* .

Т е о р е м а 4. *Если задача (7) априорно ограничена в точке $\lambda \in K$, то найдется шар в K с центром в точке λ , что задача (7) априорно ограничена в совокупности на этом шаре.*

Т е о р е м а 5. *Пусть $B(\lambda, \varepsilon) \subset K$ ($\varepsilon > 0$) – шар на котором задача (7) априорно ограничена в совокупности. Тогда для любых $(\tau, \lambda) \in (a, b] \times B(\lambda, \varepsilon)$ множество $H(x_0, \tau, \tilde{\lambda}) \neq \emptyset$ и является компактом в пространстве $\tilde{C}^n[a, \tau]$. отображение $\tilde{H}: B(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \text{comp}(\tilde{C}^n[a, b])$, определенное равенством*

$$\tilde{H}(\tilde{\lambda}) = H(x_0, b, \tilde{\lambda}),$$

полу непрерывно сверху по Хаусдорфу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zessa P. On the translation multioperator along the solutions of semilinear differential inclusions in Banach spaces // Canadian Appl. Math. Quart. 1998. V. 6. № 2. P. 139-155.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. // Екатеринбург УГТУ-УПИ. 2010.
5. Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2000. Т. 3. 2. С. 88-102.
6. Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами // Известия вузов, Серия Математика 2010. 8. С. 16-29.
7. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI // Вестник Тамб. ун-та. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275-1313.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013гг. (соглашение № 14.132.21.1348).

Malyutina E.V. FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH MULTIVALUED IMPULSES AND WITH DELAY-DEPENDENT ON PARAMETER

The properties of the set of solutions of Cauchy problem for impulsive functional-differential inclusion with delay-dependent on parameters are investigated.

Key words: functional-differential inclusions; delay-dependent on parameter; multivalued impulses.